数理解析研究所講究録
431巻 1981年 78-82

Higher residues とその応用

京大 数理研 斎藤恭司 *)

微分形式

$$\frac{dx}{x}, \qquad \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}, \qquad \frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}$$

等に対し一種の"Hamilton系"を導入し、これらをそれぞれそれに同伴した原始積分とみなすことを考える。Hamiltonianとして

$$F = xy-t, \quad x^2+y^2-r^2 \text{(符号を除き)}, \quad y^2-(4x^3-g_2x-g_3)$$

とおけば、上はそれぞれ $\mathrm{Res}\left[\frac{dx\,dy}{F}\right]$ となる。例えば

$$\mathrm{Res}\left[\frac{dx\,dy}{xy-t}\right] = \frac{dx}{\frac{\partial(xy-t)}{\partial y}} = \frac{dx}{x}$$

つまり、一般に $\mathrm{Res}\left[\frac{dx\,dy}{F}\right]$ のHamiltonianがFだというわけである。上のFはそれぞれ A_1, A_2, A_3 という特異点の普遍変形になっていることに注意すれば、A_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, $\widetilde{E}_6$, $\widetilde{E}_7$, $\widetilde{E}_8$ のすべてについてFが構成できるはずである。実際、A_n については超楕円積分で書ける。更に進むと面白そうな超越函数が出て来る。これらは以下に述べる higher residue

*) 文責・研究代表者

$K^{(k)}$という概念を用いると，これに対する広田の双一次形式を用いた２階微分方程式で書けるのである．

$$F(x_0,\cdots,x_n,t_1,t_2,\cdots,t_\mu)=t_1-F_1(x,t')$$

をHamiltonianとする．$t'=(t_2,\cdots,t_\mu)$である．

$$\begin{array}{ccl}\mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{C}^\mu\supset & X & =\{F=0\}\\ & \cup & \\ & C & =\left\{\frac{\partial F}{\partial x_0}=\cdots=\frac{\partial F}{\partial x_n}=0\right\}\end{array}$$

によりCを導入し，また

$$\mathcal{O}_T=\mathbb{C}\{t_2,\cdots,t_\mu\},\quad \Omega^{n+1}_{X/T}=\mathcal{O}_X\,dx_0\wedge\cdots\wedge dx_n$$

とおく．*higher residue*

$$K^{(k)}:\Omega^{n+1}_{X/T}\times\Omega^{n+1}_{X/T}\longrightarrow\mathcal{O}_T,\quad k=0,1,2,\cdots$$

を次の様に帰納的に定義する．$x=(x_0,\cdots,x_n)$とおき，まず

$$K^{(0)}(\varphi(x,t')dx,\psi(x,t')dx):=\mathrm{Res}_{X/T}\left[\frac{\varphi\psi\,dx_0\wedge\cdots\wedge dx_n}{\frac{\partial F}{\partial x_0}\cdots\frac{\partial F}{\partial x_n}}\right]$$

とおく．ただし$\frac{\partial F}{\partial x_0}=\cdots=\frac{\partial F}{\partial x_n}=0$は完全交叉になっているとする．そのときResは次々にとれ，最後は$\mathcal{O}_T$の元となる．

$$K^{(1)}(\varphi dx,\psi dx):=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\mathrm{Res}_{X/T}\left[\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\psi-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)dx}{\frac{\partial F}{\partial x_0}\cdots\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2\cdots\frac{\partial F}{\partial x_n}}\right]$$

$$\begin{aligned}K^{(2)}(\varphi dx,\psi dx):=&\frac{1}{4}\sum_{i\le j}\mathrm{Res}_{X/T}\left[\frac{(\varphi_{ij}\psi-\varphi_i\psi_j-\varphi_j\psi_i+\varphi\psi_{ij})\,dx}{\frac{\partial F}{\partial x_0}\cdots\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2\cdots\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)^2\cdots\frac{\partial F}{\partial x_n}}\right]\\&-\frac{1}{4}\sum_{i\le j\le k}\mathrm{Res}_{X/T}\left[\frac{\varphi\psi\frac{\partial^3F}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}\,dx}{\frac{\partial F}{\partial x_0}\cdots\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2\cdots\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)^2\cdots\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\right)^2\cdots\frac{\partial F}{\partial x_n}}\right]\end{aligned}$$

ここで，$K^{(1)}$，$K^{(2)}$の分子はそれぞれ広田の記号で$D_{x_i}\varphi\cdot\psi$，$D_{x_i}D_{x_j}\varphi\cdot\psi$と書けることに注意せよ．一般にも最高階のとこ

るはそう書ける．さて柏原の理論によれば，Fに同伴したGauss-Manin接続が単純ホロノミー系となり，従って後者を考えておけばもとのFは同型を除き一意に復元できる．そこで一般の$K^{(k)}$は次の諸性質により定義する．

0) $K^{(k)}$ は kが偶数のとき対称，kが奇数のとき歪対称．

1) $K^{(k)}(t_1\omega_1, \omega_2) - K^{(k)}(\omega_1, t_1\omega_2) = (n+k-1)K^{(k-1)}(\omega_1, \omega_2)$

(これはSchlesinger変換(exponentのずらし)とも解釈できる．)

2) $\frac{\partial}{\partial t_i} K^{(k)}(\omega_1, \omega_2) = K^{(k)}(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t_i}} \omega_1, \omega_2) + K^{(k)}(\omega_1, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t_i}} \omega_2)$

$i = \cdots, \mu$.

3) $K^{(k)}(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t_1}} \omega_1, \omega_2) = K^{(k+1)}(\omega_1, \omega_2)$

また，ζをn-形式とすれば，

$$K^{(k+1)}(dF_1 \wedge \zeta, \psi dx) = K^{(k)}(d\zeta, \psi dx)$$

故に$K^{(k)}$は $dF_1 \wedge d\Omega^{n-1}_X \times \Omega^{n+1}_{X/T}$ を0に写すので，$\mathcal{H} = \Omega^{n+1}_{X/T} / dF_1 \wedge d\Omega^{n-1}_{X/T}$ とおけば，実は

$$K^{(k)} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{O}_T$$

という双一次形式とみなせる．$\mathcal{H}$は階数μの自由$\mathcal{O}_S$-加群である．($S = \mathbb{C}^{\mu}$)．$\mathcal{H}$のfiltrationとして，

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(0)} \underset{\xleftarrow{\nabla_{\frac{\partial}{\partial t_1}}}}{\supset} \mathcal{H}^{(-1)} \supset \mathcal{H}^{(-2)} \supset \cdots$$

を考える．$\mathcal{H}^{(0)}$は $\mathbb{C}\{\{(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t_1}})^{-1}\}\}$-加群として単純holonomy系.

(即ち単項生成)となる. その生成元 $\zeta^{(0)}$ が Hamiltonian の候補を与えるであろう. そこで一般に

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i>k} a_{ik}(t') \nabla_{\frac{\partial}{\partial t_i}} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t_1}}\right)^{-k} \zeta^{(0)} = \omega$$

を計算してみる. $\zeta^{(-k)} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t_1}}\right)^{-k} \zeta^{(0)}$ とおけば, $\delta, \delta' \in \sum_{i=1}^{\mu} \mathcal{O}_T \frac{\partial}{\partial t_i} = \mathcal{G}$ に対し

$$\nabla_{\delta} \nabla_{\delta'} \zeta^{(-2)} = \nabla_{\delta * \delta'} \zeta^{(-1)} + \nabla_{\nabla_{\delta}\delta'} \zeta^{(-2)} + \nabla_{\bigcirc} \zeta^{(-3)} + \cdots$$

と書ける. ここに $\delta * \delta'$ は residue product と云われるものである. 同様に

$$t_1 \nabla_{\delta} \zeta^{(-1)} = \nabla_{t_1 * \delta} \zeta^{(-1)} + \nabla_{N\delta} \zeta^{(-2)} + \nabla_{\bigcirc} \zeta^{(-3)} + \cdots$$

と書ける. ここで

∇: $\mathcal{G}$ 上の integrable, torsion free, metric connection

N: $\mathcal{G} \to \mathcal{G}$ は $\mathcal{O}_T$-endomorphism.

$\nabla N = 0$, $N + N^* = (n+1)I$

等がわかる. 具体的計算は未知だが面白いと思う. 時間が無いのでうまく説明できないが, flat coordinate の存在と て函数の存在が対応している. さて, 生成元をうまく選べば $\zeta^{(-3)}$ から先は消せるかもしれない. 即ち

<u>定義</u> $\zeta^{(0)} \in \mathcal{H}^{(0)}$ が原始積分とは,

i) $K^{(i)}(\nabla_{\delta} \zeta^{(-1)}, \nabla_{\delta'} \zeta^{(-1)}) = 0 \qquad i \geq 1$

ii) $K^{(i)}(\nabla_{\delta} \nabla_{\delta'} \zeta^{(-2)}, \nabla_{\delta''} \zeta^{(-1)}) = 0 \qquad i \geq 2$

iii) $K^{(i)}(t, \nabla_\delta \zeta^{(-1)}, \nabla_\delta \zeta^{(-1)}) = 0 \qquad i \geq 2$

を満たすことを云う.

このとき $\zeta^{(0)}$ は Ψ.D.O. ではなく P.D.O. としても単純ホロノミー系を満たすことになる.

$F(x,t)$ の計算については A_l, D_l, E_6, E_7, E_8 で実際上の意味での原始積分が存在することがわかっている. $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$ については未知の函数となるはずである.